שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

1) האם קיימת $f(z)$ אנליטית ב $B_1(0)=\{|z|<1\}$ כך ש $|f(z)|=\ln(2+|z|)$ לכל $z\in B_1(0)$?

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<\infty$ ונניח כי קיים α ממשי לא שלם כך שלכל $R>0$ מתקיים $\int_0^{2\pi}\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|d\theta\le 2\pi R^{\alpha}$. הוכיחו כי $f\equiv 0$ בטבעת

3) יהי $|a|<1$. כמה פתרונות יש למשוואה $e^{z+2}=\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}\cdot z}\right)^{2020}$ ב - $B_1(0)$?

4) הוכח/הפרך:
קיימת פונקציה $f(z)$ אנליטית ב $B_{1+\varepsilon}(0)$ כך ש $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

5) הראו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^z-i}{e^z+i}\right)^n$ מתכנס בהחלט ב - $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\operatorname{Im}(z)<\pi\}$

6) נניח כי $f=u+iv$ שלמה כך ש $v(x,y)=\cosh\left[u(x,y)\right]$ לכל $z\in U$
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

7) הוכיחו כי לכל $R>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ למשוואה $1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^n}{n!}=0$ אין פתרון ב $B_R(0)$

8) הוכח/הפרך:
קיימת $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0\ne a_n\in\mathbb{C}$ כך ש $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ ו - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n a_n}{(2k+1)^n}=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$

9) הוכיחו כי לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2t\cos(\theta)}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(n!)^2}$

10) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq\frac{1}{n+2}$

11) חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$

12) הוכח/הפרך:

קיימת פונקציה שלמה $f(z)$ כך ש $\left|z^2\cdot f(z)+e^z\right|\le 1$ לכל $|z|<1$

13) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<2$ כך שלכל $n\ge 0$ מתקיים

$\oint_{|z|=1} z^n f(z)dz=0$. הוכיחו כי $\lim_{z\to 0} f(z)$ קיים וסופי.

14) הוכח/הפרך:

קיימת פונקציה $f(z)$ שלמה כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$

15) האם קיימת $f(z)$ שלמה המקיימת

$$f(x)=\begin{cases} x^4 & x\in\mathbb{R},x>0 \\ -x^4 & x\in\mathbb{R},x<0\end{cases}$$

16) א. הראו כי $\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} |Log(z)|=\infty$

ב. הראו כי $\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} |z\cdot Log(z)|=0$

ג. האם הפונקציה $f(z)=\begin{cases} z\cdot Log(z) & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ אנליטית ב $z=0$?

17) חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

18) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^4}$ לטור לורן בטבעת $0<|z-i|<2$

19) נתון כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<1$ וזוגית (כלומר $f(z)=f(-z)$)

חשבון $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz$

20) נניח כי $f(z):B_2(0)\to\mathbb{C}$ אנליטית ונניח כי בתחום $U=\{1<|z|<2\}$ היא חח״ע.

הוכיחו כי $f(z)$ חח״ע ב - $B_2(0)$

רמז : המשמעות הגיאומטרית של עקרון הארגומנט

21) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב - $B_1(0)$.

הוכיחו כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש - $\frac{1}{n}\neq f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right)$

22) תהי $h(z)=z^2-4-e^{-3z}$. מצאו את מספר האפסים של $h(z)$ בחצי המישור הימני $\mathrm{Re}(z)>0$

23) מצאו את התמונה של הרביע הראשון $A=\{z\,|\,\mathrm{Re}(z)>0,\mathrm{Im}(z)>0\}$

תחת ההעתקה $f(z)=\dfrac{(1+z^2)-i(1-z^2)}{(1+z^2)+i(1-z^2)}$

24) יהי $P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ פולינום מתוקן.

הוכיחו כי כל שורשי הפולינום נמצאים בעיגול $|z|<\sqrt{1+|a_{n-1}|^2+...+|a_1|^2+|a_0|^2}$

רמז : אי שיוויון קושי שוורץ $\left|\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}a_k\overline{b_k}\right|\leq\sqrt{\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}|a_k|^2\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}|b_k|^2\right)}$

25) תהי $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה

נניח כי $f^2(z)$ ו - $f^3(z)$ אנליטיות ב $B_1(0)$

הוכיחו כי $f(z)$ אנליטית ב $B_1(0)$

26) הוכח/הפרך :

אם $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה

ו - $f^2(z)$ ו - $f^6(z)$ אנליטיות ב $B_1(0)$

אז $f(z)$ בהכרח אנליטית ב $B_1(0)$

27) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2}\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1}dz$

28) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z^2}\cos\left(e^{\frac{1}{z}}\right)}{z-2}dz$

29) נסמן $f(z)=\tan(z)$ ו - $A=\left\{z\in\mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4}<\mathrm{Re}(z)<\frac{\pi}{4}\right\}$. מצאו את $f[A]$

30) נניח כי $f(z)=u+iv$ אנליטית ב - $B_1(0)$ וכי $|u(x,y)|+|v(x,y)|=1$ ב - $B_1(0)$
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

תשובות סופיות

1) לא.
2) הוכחה.
3) אין אפסים בכלל.
4) הפרכה. לא קיימת כזו פונקציה.
5) הוכחה
6) הוכחה
7) הוכחה
8) הפרכה
9) הוכחה
10) הוכחה
11) $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$
12) הפרכה
13) הוכחה
14) הפרכה. לא קיימת כזו פונקציה.
15) לא קיימת כזו פונקציה.
16) א. הוכחה ב. הוכחה ג. לא
17) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
18) $f(z)=\sum_{k=-4}^{\infty}(-1)^{k+4}\frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}}(z-i)^k$
19) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz=0$
20) הוכחה
21) הוכחה
22) יש אפס אחד בלבד בחצי המישור הימני.
23) התמונה היא $B_1(0)$
24) הוכחה
25) הוכחה
26) הפרכה
27) $2\pi i$
28) $-\frac{\pi i}{2}\cos\left(\sqrt{e}\right)$
29) $f[A]=B_1(0)$
30) הוכחה